

Ненад С. Милинковић

<https://orcid.org/0000-0003-2282-787X>

Сања М. Маричић

<https://orcid.org/0000-0002-0464-3527>

Универзитет у Крагујевцу

Педагошки факултет у Ужицу

Катедра за методике

Бојан Лазић

<https://orcid.org/0000-0002-8226-0564>

Универзитет у Новом Саду

Педагошки факултет у Сомбору

Катедра за математику и методику

наставе математике

УДК 37.091.3::512-028.31

DOI 10.46793/Uzdanica22.3.045M

Оригинални научни рад

Примљен: 31. октобаар 2025.

Прихваћен: 19. фебруар 2026.

## ИСТРАЖИВАЧКА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ – ПУТ КА РАНОМ АЛГЕБАРСКОМ ОБРАЗОВАЊУ

*Ајсџиракџи:* Аутори у раду указују на важност учења садржаја алгебре на раном узрасту, али и на проблеме и потешкоће који прате то учење. У циљу да изнађу методички оквир учења садржаја алгебре који ће да резултира учењем са разумевањем, скрећу пажњу на истраживачку наставу. У том контексту указују на карактеристике и методичке вредности ове врсте наставе и представљају методички оквир кроз следеће фазе учења – провокација, формулисање питања, експериментисање, дискусија, рефлексја и документација. Идеја је да ученици кроз наведене фазе учења откривањем и манипулацијом конкретним предметима истражују и формирају појмове ране алгебре. На конкретним примерима садржаја у раду је показано како се истраживачком наставом може формирати појам функционалне зависности, појам једначине и неједначине и како ученици да овладају решавањем једначина и неједначина са разумевањем. Циљ овако обликоване наставе ране алгебре јесте боље разумевање основних алгебарских појмова, кроз активно ученичко конструисање сопствених закључака.

*Кључне речи:* математика, рана алгебра, истраживачка настава, активно учење, научно знање.

### УВОД

Темељи математичког образовања постављају се са почетком систематског математичког образовања. На самом почетку ученици се сусрећу

са садржајима алгебре, који представљају један од важних темеља математичког образовања и, како то бројни аутори истичу, „капију” учења других садржаја. Рана интеграција садржаја алгебре у наставни програм математике има за циљ не само развијање способности алгебарског мишљења и логичког размишљања, већ и припремање ученика за касније учење математике, извођење генерализација и добро овладавање симболичким начином презентовања. Међутим, упркос значају који се придаје учењу садржаја алгебре и указивању на значај ране алгебре, у пракси се дешава да се ученици сусрећу са бројним тешкоћама у учењу ових садржаја (Knuth et al. 2006; Милинковић 2021; Зељић 2014; Kieran 1992; Carraher et al. 2000; Kieran 2004; Filloy, Rojano 1989; Sfard, Linchevski 1994). Алгебру и учење алгебре на раном узрасту карактеришу бројне специфичности и прате бројне тешкоће које, у првом реду, произлазе из апстрактности математичких појмова, специфичности математичког језика и коришћења симболике у учењу, а које воде до ограниченог разумевања апстрактне природе алгебарских садржаја (Kieran 2004; Filloy, Rojano 1989; Sfard, Linchevski 1994). Као кључне проблеме у учењу садржаја алгебре аутори издвајају: (1) ограничено тумачење знака једнакости (Vergnaud 1985; Мариčić, Милинковић, Brković 2023; Milinkovic et al. 2022); (2) погрешно схватање значења слова која представљају варијабле (Vergnaud 1985; Kieran 1981; Милинковић 2021); (3) неправилно разумевање појмова *нейознајта* и *променљива* (Akgün, Özdemir 2006; Stephens, et al. 2015; Милинковић, Маричић 2022); (4) погрешно схватање појмова *једначина* и *неједначина* и поступка њиховог решавања (Милинковић 2021; Stacey, MacGregor 1999; Hoch, Dreyfus 2004) и (5) проблеме у развијању појма функције и функционалног мишљења (Blanton, Kaput 2011; Милинковић 2021; Carraher et al. 2008).

Неки од узрока проблема у учењу алгебре су, по мишљењу Киндта (Kindt 1980), „недостатак пажње у генерализацијама аритметичких појмова; пракса да се прерано улази у подучавање формалне алгебре; несагледавање методичких разлога за кога и зашто је корисно развијање алгебре у нижим разредима основне школе” (према Molina et al. 2005: 265). Решење проблема треба тражити у учионици, а то подразумева проналажење приступа који ће да резултира учењем садржаја алгебре са разумевањем и превазилажењем проблема које су аутори идентификовали. Основни постулат који се у путу методичке трансформације ових садржаја мора поштовати јесте да учење не треба да буде просто преношење знања, а ученик пасивни прималац, већ ученик мора бити активни конструктор тог знања. Ученик мора да буде у ситуацији да постепено гради своје знање, да то учење буде засновано на његовом знању и искуству и да за њега има чин открића. У раду желимо да скренемо пажњу на истраживачку наставу (*inquiry-based learning*), као модел који може да допринесе учењу садржаја алгебре на раном узрасту и да на конкретним примерима садржаја алгебре илуструјемо примену. Одабир

истраживачке наставе произашао је из карактеристика самог концепта наставе који промовише активну улогу ученика у процесу учења, где ученик поставља питања, формулише хипотезе, изводи закључке кроз непосредно искуство и сарадњу са вршњацима и учитељем.

Бројни аутори издвајају истраживачко учење као приступ који је веома ефикасан у учењу у области науке и математике (Furtak et al. 2012; Constantinou et al. 2018; Minner et al. 2010; Spronken-Smith 2008). Истраживачким учењем постижу се значајни резултати, стичу се вештине и концепти битни за целоживотно учење (Krugly-Smolska, Tailor 2004; DeJong 2006) и развијају се компетенције, способности и вештине (Anderson 2002, Sungur et al. 2001; Seyhan, Morgil 2007; Carak et al. 2008).

## ИСТРАЖИВАЧКА НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ – ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ

Истраживачки усмерену наставу карактерише специфичан дизајн, базиран првенствено на формулисању питања којима се обликује истраживачка активност ученика и укључује више аспеката: контекст и оквир за питања, усмереност на питања као и различите нивое питања (Greene, Renesse 2016). Истраживачка настава је образовна стратегија која подразумева откривање нових узрочно-последичних односа кроз постављање хипотеза, експерименте и посматрање (Keselman 2003), па се стога и посматра као метод решавања проблема (Pedaste et al. 2012). То је настава која „наглашава улогу ученика у процесу учења где се они подстичу да истражују материјал, постављају питања и размењују идеје, а знања граде истраживањем, искуством и дискусијом” (Глоговац и др. 2021: 486). Таквим моделом наставног рада ствара се погодан амбијент за формирање знања која се могу широко применити (Gašić-Pavišić, Stanković 2012; Furtak et al. 2012) и остварити напредак у области математичке и научне писмености (Dorier, Garcia 2013).

Како је један од основних циљева наставе математике оспособљавање ученика за решавање проблема, а не репродуктивно знање, наставу математике треба доживети као интерактиван процес, у коме ће ученици активно да учествују, истражују, изводе закључке, размењују искуства, мишљења и ставове (Hattie 2009). При дизајнирању наставе пожељно је стварање реалистичних ситуација за решавање математичких проблема, увођење ученика у самосталан и истраживачки рад, развијање њихових способности за решавање проблема и развој њиховог стваралачког мишљења (Friedman 2005; Chowdhury 2016).

Изражена тежња за ширим резоновањем и функционалним знањем ученика оправдава развој и афирмисање истраживачки засноване наставе и

у домену математике (Artigue, Baptist 2012). Разматрање перспективе примене истраживачки заснованог учења у настави математике и обезбеђивања места у курикулуму математике, оправдано се наметнуло као један од тежишних проблема истраживања. Изазови и могућности учења заснованог на истраживању проучавани су у 12 европских земаља (Engeln et al. 2013; Dorier, Garcia 2013), а налази студија истичу да је овако засновано учење ефикасан начин за побољшање исхода математичког и научног образовања. Непосредним истраживачким активностима максимално се стимулише развој математичког мишљења и закључивања (Jessen et al. 2017), као једног од суштинских циљева, чиме се повећава капацитет ученика за концептуално разумевање (Minner et al. 2010; Jessen et al. 2017) и критичко промишљање (Hattie 2009).

Припрема и реализација истраживачки засноване наставе математике захтева континуирани низ активности. Само руковођење истраживачким учењем обухвата низ активности: избор теме, постављање истраживачког питања, дефинисање хипотезе, припрему и реализацију истраживања, као и анализу резултата и формулисање закључака. При томе, у сваком наредном нивоу руковођење поступно прелази са наставника на ученика, у складу са развојем когнитивних способности (Colburn 2000). Треба се ослањати на постојеће искуство и знање ученика и настојати да ученици самостално откривају математичке правилности и изводе закључке, са крајњим циљем да се оспособе за самостално истраживачко учење (Bell et al. 2005; Rezba et al. 1998). Минер и сарадници утврдили су да је у највећем проценту обухваћених истраживања (61% од 138 истраживања) доказан позитиван утицај неког нивоа истраживачки обликоване наставе на повећање постигнућа и трајност знања ученика (Minner et al. 2010). Утврђено је да учење засновано на истраживању може побољшати различите вештине истраживања, попут идентификовања проблема, формулисања питања и хипотеза, планирања и извођења експеримената, прикупљања и анализе података, представљања резултата и доношења закључака (Mäeots et al. 2008). Према Лазондеру и Хармсену (Lazonder, Harmsen 2016), вођено истраживање показало се као најефикаснији начин обликовања истраживачке наставе.

Резултати неких студија (Hmelo-Silver et al. 2007) указују да примена истраживачког приступа у настави математике утиче на постигнућа и мотивацију ученика, те да се исходи истраживачке наставе, вештине и знања могу мерити на нивоу основне школе (Pedaste et al. 2012). Одређена истраживања разматрала су питања повећавања интересовања ученика за математику и подстицања развоја њихових вештина и компетенција за употребу алгоритама применом истраживачки обликоване наставе математике (Laudano et al. 2019). Добијени резултати показују предности истраживачког приступа, посебно у домену развоја вештина ученика потребних за истраживање, откривање и утврђивање математичких вештина. Осим наведеног, ученици су

показали позитиван став током активности и евидентно повећање интересовања за апстрактна питања и уопште за математику.

Скимпорди (Skoumpourdi 2019) истиче да је истраживачко учење, као метода учења математике, основни начин за покретање и подршку ефикасном учешћу ученика у наставном процесу. Притом наводи да наставници морају осмишљавати и примењивати математичке активности које су отворене за процес заснован на истраживању. Исти аутор предлаже оквир за дизајнирање активности заснованих на истраживањима (FIBA) за математику у раном детињству, праћен примером, који има за циљ да помогне учитељима у дизајнирању наставе.

Ву и Лин (Wu, Lin 2016) су представили успешно дизајниран курикулум наставе математике заснован на истраживању са децом предшколског узраста. Дизајнирани математички курикулум заснован на истраживању обухватао је садржаје о бројевима, мерењу и мерама, простору и облику и логичке задатке. Спроведено је обogaћено математичко искуствено учење засновано на истраживачким активностима, где су деца смислено вођена откривањем структурних односа између појмова повезаних са бројевима и њиховим апликацијама са проблемима који произлазе из стварног света. Експериментално су потврдили изводљивост математичког курикулума заснованог на истраживању и упитима и истакли предности овако оријентисаног учења математике у почетном математичком образовању.

Предност приступа учењу заснованом на истраживању представљена је истраживањем у области учења разломака уз вођено истраживање (Schumacher, Roth 2015). У истраживању су учествовали ученици шестог разреда из две различите гимназије у Немачкој. Резултати на основу прикупљених података о знању разломака и способности ученика да генеришу протоколе показали су значајан пораст знања о разломцима, односно боље постигнуће применом истраживачки обликоване наставе.

Трогодишњи Еразмус+ пројекат под називом „Математичко образовање – релевантно, занимљиво и примењиво” (*MERIA, Mathematics education – relevant, interesting and applicable*) бавио се проблемом истраживања како математику учинити значајном, занимљивом и примењивом за ученике. Основни циљ пројекта био је унапређење квалитета математичког образовања у Европи на различитим нивоима образовања, помоћу истраживачки усмерених приступа настави, уз одговарајућу подршку професионалном развоју наставника. Резултат пројекта је промоција истраживачки усмерене наставе математике и израда иновативних материјала за учење и поучавање и подршка наставницима математике у имплементацији овако оријентисане наставе. Са тим у вези, едуковано је 150 наставника из четири земље (Данска, Холандија, Хрватска и Словенија), који су у току две године тестирали 11 сценарија из *MERIA* пројекта на 64 лекције, у чијој реализацији је активно учествовало укупно 1290 ученика. Општи закључак је да је корисно

и потребно увести истраживачки усмерену наставу јер она подстиче мотивацију и подупире математичко закључивање (Jessen et al. 2017).

Бројне предности истраживачки оријентисане наставе које је препоручују (Hammerman 2006; Jessen et al. 2017), као и одређене студије које говоре о ефикасности наставе математике засноване на истраживању (Bell et al. 2005; Rezba et al. 1998), оправдавају потребу афирмисања њене примене у почетној настави математике у Републици Србији, кроз пружање примера за све фазе припреме и спровођења истраживања, базираних на конкретним програмским садржајима.

Савремена настава математике заснована је на циљевима и исходима учења који описују знања, вештине, способности и вредносне ставове које ученик треба да усвоји на крају школовања, са јасним захтевом за активном улогом ученика у процесу учења. Ако се има у виду честа пасивност ученика у стицању знања, посебно у контексту математике, могло би се рећи да је оправдана претпоставка да настава заснована на истраживачким активностима ученика резултира одређеним предностима и да унапређује наставни процес. Из тог разлога, пажњу смо у раду усмерили ка теоријском разматрању перспектива истраживачке наставе у почетној настави математике на садржајима ране алгебре, који за ученика млађег школског узраста представљају посебан проблем управо због апстрактности која те садржаје одликује.

Могућности примене истраживачки засноване наставе математике су широке, јер се почетни математички појмови усвајају на опажајном и сазнајном нивоу кроз игралике истраживачке активности. Основни методички кораци у истраживачкој настави математике обухватају фазе које воде ученика од проблема ка открићу и формализацији математичких знања. Први корак у учењу је суочавање са проблемом, који подстиче радозналост и покреће истраживање (Artigue, Blomhøj 2013; Baptist, Artigue 2012). Следи формулисање истраживачког питања и постављање хипотеза, након чега следи експериментисање и испитивање решења (Artigue, Blomhøj 2013). У завршним фазама, ученици улазе у дискусију и аргументацију, затим рефлексију и генерализацију, и на крају документацију и презентацију резултата (Artigue et al. 2020; Глоговац и др. 2021).

Овај приступ подстиче активности везане за развијање математичких појмова, тако што помаже ученицима да боље разумеју и елементарну алгебру. На овај начин се гради јака основа знања кроз активно сарадничко учење ученика у решавању проблема и развијању нових појмова истраживањем. Циљ је да се подстицање и развој раног алгебарског закључивања и изградња разумевања математичких појмова ране алгебре усмери кроз наставне активности осмишљене око одређеног централног питања или проблема активним истраживањем и експериментисањем ученика.

Истраживачка настава има своју јасну структуру и етапе кроз које пролазе и учитељ и ученици у процесу учења. Фазе у учењу бројни аутори

(Artigue, Blomhøj 2013; Baptist, Artigue 2012; Artigue et al. 2020) представљају на различите начине. Сажето, те фазе можемо представити издвајајући фазе истраживачке наставе математике, улогу ученика у свакој фази и циљ који желимо остварити у свакој фази (Табела 1).

Табела 1. Фазе учења истраживачке наставе математике

Фазе ИИМ	Улога ученика	Циљ
1. Провокација	Истражује проблем	Улази у контекст проблема
2. Питање	Формулише истраживачко питање	Проблематизује
3. Стратегије	Експериментише, записује	Испитује
4. Дискусија	Аргументује	Учи симболику
5. Рефлексија	Упоредује	Изводи правило
6. Представљање	Креира и презентује	Учвршћује

Констатујемо да у свакој фази учења доминира истраживачка активност ученика која је обезбеђена добрим вођењем од стране учитеља, а чија је улога да ствара ситуације за учење које „провоцирају” ученика на истраживачку активност.

## ИСТРАЖИВАЧКИ ЗАСНОВАНА НАСТАВА НА САДРЖАЈИМА РАНЕ АЛГЕБРЕ

Настава математике заснована на истраживању наглашава важност помоћи ученицима да изграде сопствено разумевање математичких појмова кроз активно истраживање и експериментисање. У раду смо одабрали да покажемо начин примене истраживачке наставе на садржајима: функционалне зависности резултата од промене компонената рачунских операција, једначине, као појмова који на овом узрасту често представљају проблем у учењу због њихове апстрактности.

Пример садржаја ране алгебре који може изазвати бројне проблеме је разумевање функционалне зависности. Велики број истраживача утврдио је да деца у млађим разредима основне школе могу развити и користити различите репрезентације, које подржавају идеју функције, као и то да се одређене коваријацијске везе могу описати речима и симболима (Blanton, Kaput, 2004; Cai et al. 2005; Dabić et al. 2021; Стојкановић, Маричић 2025). Са друге стране, истраживања су показала да деца овог узраста могу користити симболички језик за моделовање и решавање једначина са непознатим количинама (Blanton, Kaput 2011; Brizuela, Schliemann 2003; Schliemann

et al. 2003; Carraher et al. 2008), што би представљало основу за разумевање функционалне зависности.

У програмима наставе и учења математике за млађе разреде основне школе у Републици Србији, у оквиру садржаја ране алгебре, није експлицитно исказан захтев за развијање идеје функције. У програму математике највећи је фокус на решавању проблема са једначинама у којима се „ $x$ ” третира као непозната. Функционална перспектива проширује значење алгебарских израза третирајући „ $x$ ” као променљиву, тј. као објекат чија вредност може варирати. На овај начин се ученици подстичу да пређу са размишљања о операцијама са специфичним и конкретним бројевима на односе који постоје између променљивих (Carraher et al. 2008). Као основа на којој се граде алгебарске идеје, често се узимају садржаји аритметике, односно почиње се од садржаја који се односе на савладавање рачунских операција и различитих форми и модела везаних за садржаје аритметике. Такав приступ садржајима функционалне зависности не мора се ослањати искључиво на аритметику. Навешћемо пример како се истраживачка настава може користити за развијање идеје функционалне зависности и променљиве кроз знања везана за садржаје о површини правоугаоника. Приказаћемо сваку фазу процеса учења у оквиру истраживачке наставе, односно етапе наставног процеса за развијање овог појма кроз конкретне примере.

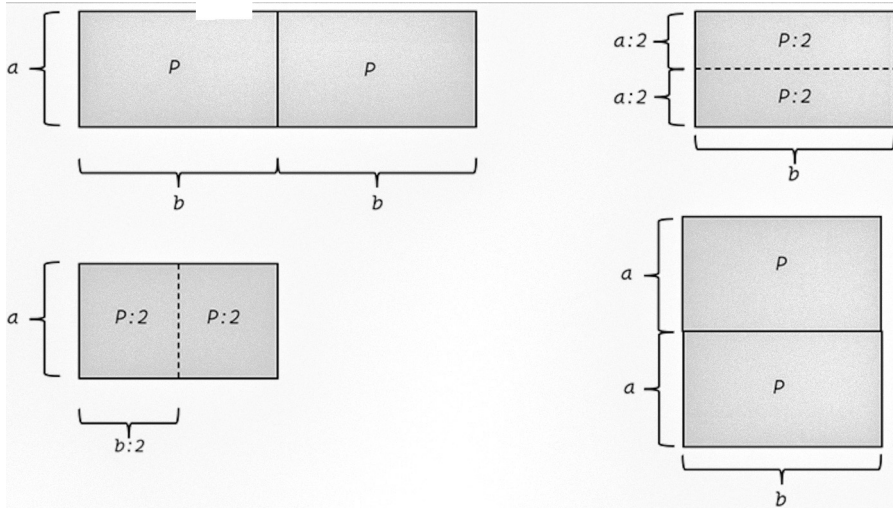
*Провокација – суочавање са проблемом и исцртавање.* За почетак, учитељ може ученицима дати лист хартије на ком је нацртан правоугаоник и замолити их да измере дужину и ширину правоугаоника. Учитељ може да подстакне ученике да користе лењир за мерење димензија правоугаоника и да након тога забележе измерене димензије.

*Исцртавање.* Након што измере дужину и ширину правоугаоника, ученици имају захтев да израчунају површину правоугаоника. Израчунавање површине правоугаоника представља основу за овакав начин истраживања, јер уводи множење које је неопходно како би се истражиле промене у компонентама рачунске операције. Следећи захтев јесте бележење добијених вредности површина правоугаоника.

*Формулисање исцртавачког мишљења и експериментисање.* Када ученици израчунају површину правоугаоника, учитељ треба да их усмери да истраже однос између дужине и ширине правоугаоника и површине правоугаоника. На пример, учитељ би могао да замоли ученике да удвоструче дужину правоугаоника уз задржавање константне ширине и у таквом случају израчунају површину новодобијеног правоугаоника. Након тога захтев за ученике треба да буде да упореде површину новодобијеног правоугаоника са површином правоугаоника који су мерили на почетку. Овакав принцип промене услова у задатку омогућава ученицима да самостално делују у физичком окружењу истражујући, тако да се сваки од закључака може извести

и физичком манипулацијом са листовима папира и њиховим лепљењем и додавањем или сечењем и скраћивањем (Слика 1).

Слика 1. Истраживање кроз манипулисање папирним листовима



*Испитивање решења и дискусија.* Кроз истраживање и дискусију, ученици треба да закључе да када се једна димензија правоугаоника увећа два пута, а друга остане иста, површина правоугаоника се такође удвостручује. Ученици ће на овај начин схватити да овај однос важи чак и ако се димензије мењају на друге начине (као што је повећавање или смањивање дужине и ширине исти број пута).

*Рефлексија и генерализација.* Варирањем услова кроз експериментисање које се односи на дужину и ширину правоугаоника, врши се генерализација и изводи закључак о односима који постоје између производа и промене чинилаца.

*Документација и презентација резултата.* Користећи примере реалног контекста, ученици закључују о појму „зависност производа од промене чинилаца” кроз опис ситуације и односа који постоје у променама тако да могу извести конкретан и генерализован закључак који се дедукцијом може применити на множење као рачунску операцију: Ако један чинилац увећамо (или умањимо) неколико пута, а други чинилац остане исти, производ ће се увећати (или умањити) исто толико пута. И алгебарском нотацијом:

$$a, b, k \in \mathbb{N} \wedge k \mid a, b$$

$$(a \cdot k) \cdot b = (a \cdot b) \cdot k \vee a \cdot (b \cdot k) = (a \cdot b) \cdot k$$

$$(a : k) \cdot b = (a \cdot b) : k \vee a \cdot (b : k) = (a \cdot b) : k$$

Истраживачком наставом на примеру површине правоугаоника ученици могу самостално да мењају услове у проблему и закључују о зависности производа од промене чинилаца. Тако овај приступ подстиче активно ангажовање са математичким појмовима и помаже ученицима да развију дубоко и трајно разумевање математичких односа. На овај начин се не подстиче само разумевање садржаја алгебре него и развој математичких способности логичког мишљења а посебно апстракције и генерализације. Са друге стране, очигледна је веза која постоји између различитих садржаја математике, што омогућава повезивање геометрије и алгебре, тако да се знања не граде усмеравајући се на једну групу садржаја, већ целовито кроз везе које међу садржајима постоје. Истраживачком наставом математике појам функционалне зависности развија се поступно, тако да се са овим садржајима у настави може почети рано. Применом истраживачке наставе ови садржаји усвајају се поступно и са разумевањем, односно личним истраживањем ученика уз подршку друге деце и учитеља.

Једначина је појам који најочигледније упућује на алгебру, као област математике, али и садржај алгебре са којим се ученик најраније сусреће у садржајима математике на млађем школском узрасту. Правилно разумевање појма једначине често код ученика покреће низ проблема као што су: проблем схватања израза као посебног и целовитог објекта којим се може манипулисати, проблем оперисања изразима, а не само бројевима, проблем разумевања знака једнакости којим се означава еквивалентност леве и десне стране једнакости, као и проблем разумевања слова као ознаке за непознату (Stacey, MacGregor 1999; Hoch, Dreyfus 2004; Sfard, Linchevski 1994; Maričić et al. 2023; Milinković et al. 2022).

Навешћемо пример како се истраживачки заснована настава математике може користити за увођење појма једначине са множењем, чиме се уједно подстиче и учвршћује правилно разумевање појма знака једнакости али и симбола за означавање непознате.

*Провокација – суочавање са проблемом и истраживање.* За почетак, учитељ може да припреми ваге са тасовима и скуп објеката са познатим масама (нпр. коцке, тегови, итд.). Ученици могу истраживати како се различите комбинације објеката могу поставити на тасове да би вага била у равнотежи. Учитељ може да поставља питања која ће водити истраживање, као што су „Шта се дешава када додате још једну коцку на један тас?“ и „Како можете вагу довести у уравнотежен положај са два различита објеката?“. Циљ ових вежби је да ученик разуме начин на који вага функционише и разуме односе који су изражени положајем тасова на ваги – уколико су тасови у равнотежи, масе су исте, односно оно што се налази на тасу са једне стране ваге, једнако је оном што се налази на тасу са друге стране ваге. Овакав приступ је добар пример визуелизације знака једнакости, чиме се постиже разумевање суштине еквивалентности леве и десне стране једнакости (једначине).

*Формулисање истраживачког питања.* Након што ученици експериментишу са различитим предметима на тасовима, учитељ им скреће пажњу да уоче одређене правилности вагања. На пример, ученици могу приметити да две коцке на једној страни ваге могу бити у равнотежи са три ваљка на другој страни ваге, чија је маса позната. Када је ситуација идентификована и представљена, учитељ може да подстакне ученике да креирају једначину, која представља однос између маса на две стране ваге, у конкретној ситуацији, при чему је маса предмета на једној страни позната. Пример конкретне ситуације која би се искористила јесте да две исте коцке буду са једне стране а тег од 500 грама са друге стране ваге (Слика 2).

Слика 2. Пример проблема мерења масе



Након тога учитељ може затражити од ученика да представе ову ситуацију тако што ће нацртати једноставну слику ваге и помоћу симбола представити предмете и њихове масе. Овај корак представљао би визуелизацију ситуације и разумевање односа који постоје између маса на тасовима ваге. Од ученика се може тражити да се ситуација изрази тако да се непознате величине изразе симболички, чиме би се створила ситуација за увођење једначине којом би се алгебарском нотацијом представила реална проблемска ситуација вагања маса. У конкретној ситуацији, једначина може изгледати овако:

$$2 \cdot x = 500 \text{ g}$$

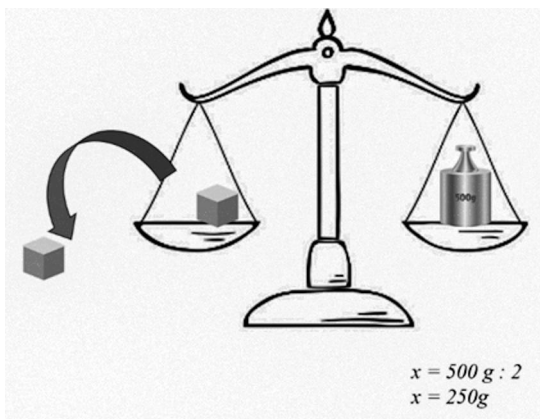
У једначини непозната  $x$  представља масу једне коцке на једној страни ваге, док  $500 \text{ g}$  представља масу на другој страни ваге.

*Изградња стипајтеије и дискусија.* Учитељ даље може да усмери пажњу ученика на то да ова једначина представља однос између маса на две стране ваге и да се може користити за предвиђање масе потребне за балансирање

вага у различитим ситуацијама. Ученици ће на овај начин бити у стању да изграде сопствено разумевање појма једначине и начина на који се она може користити за моделовање ситуација у реалном свету, али и правилне изградње појма знака једнакости.

*Рефлексија и генерализација.* Читав поступак решавања једначине може се објаснити коришћењем исте ваге, тако што би се скидањем једног од предмета затражило од ученика да опет успоставе равнотежу. То би било могуће само ако би утврдили масу предмета који је остао на тасу ваге. На овај начин манипулација предметима на тасовима ваге постаје механизам решавања једначине поступком извођења истих операција са леве и десне стране знака једнакости, односно у овом случају на левом и десном тасу ваге. Поред тога, размишљајући о односима који постоје, скидањем једне коцке вага није у равнотежи. Закључивањем о односима са предметима са почетка, ако се са једног таса ваге маса предмета преполови тако што би се склонио један од два идентична предмета, то ће се морати преполовити и маса предмета са другог таса како би се вага опет вратила у равнотежу (Слика 3). Постављањем питања „Шта значи знак = у нашој ваги?” скрећемо пажњу на појам и суштину овог знака као знака еквиваленције.

Слика 3. Манипулисање предметима на ваги



Самим тим, решавање једначине опет сводимо на конкретну ситуацију у којој је могуће манипулисање предметима. Сличним ситуацијама изводимо закључак и генерализујемо ситуације: непознати чинилац израчунавамо тако што производ поделимо познатим чиниоцем, односно:

$$\text{Ако је } a \cdot x = b, \text{ онда } x = b : a .$$

*Документација и представљање.* Ученици презентују решења али и своје „откриће”, односно закључак о једначинама са множењем и начину њиховог решавања. Овако осмишљена наставна ситуација води ученике

кроз цео циклус истраживачке наставе: од радозналости, преко формулисања питања и конструисања решења, до формализације појма једначине и знака једнакости.

Улога учитеља је искључиво фацитаторска, што значи да он треба да поставља права питања и води дискусију у смеру који је планирао а у складу са циљем у настави који је постављен. Са друге стране, садржаји који се бирају могу се адаптирати у складу са узрастом ученика, тако да ће са првим сусретом са једначинама у млађим разредима основне школе доминирати вагање, док ће се касније та улога све више померати ка пољу апстрактности и преносити на означавање алгебарском нотацијом. Очигледно је да кроз активности истраживачке наставе ученик постаје активан конструктор знања, а не пасивни прималац.

## ЗАКЉУЧАК

Реформа образовања у Србији захтева одређене мере и активности у правцу развоја, спровођења и праћења примене програма наставе и учења заснованих на савременим педагошким концептима са доказаним ефектима, савременим облицима и методама наставе и учења. Потреба за иновативнијим организационим решењима, која ће наставни процес учинити интензивнијим и ефикаснијим, намеће концепцију наставе тако да се ученицима већ у првом циклусу основног образовања омогући усвајање теоријског знања и развој научног мишљења.

Полазећи од оправдане чињенице да истраживачке активности ученика унапређују наставни процес, мишљења смо да већ на почетку математичког образовања постоје одређене педагошко-психолошке и дидактичко методичке потребе и могућности за афирмисањем истраживачког начина учења математике у првом циклусу основног образовања. Овим радом покушали смо да покажемо могућности примене истраживачки обликоване наставе на конкретним програмским садржајима математике из области алгебре. Идеја је да се у сваком кораку учења апстрактних садржаја алгебре ученици стављају у улогу активног истраживача који се пажљиво води ка закључивању и генерализацијама, а тиме уводи у апстрактни свет алгебре.

Циљ приказаних примера развијања алгебарских појмова на млађем школском узрасту у овом истраживању треба да допринесе унапређивању и афирмисању истраживачки заснованог учења алгебре у почетном математичком образовању и оснаживању учитеља у њеној примени. Осим тога, рад има за циљ да кроз представљање примера примене истраживачки засноване наставе буде подстицај за даљу примену и унапређивање квалитета методике рада у почетном математичком образовању, као и примену у другим садржајима математике у млађим разредима основне школе.

## ЛИТЕРАТУРА

Глоговац, Д., Милошевић, М., Лазић, Б. (2021). Могућности примене истраживачки засноване наставе (ИН) у почетном математичком образовању. У: С. Маринковић (ур.), *Наука, настава, учење у измењеном друштвеном контексту*. Ужице: Педагошки факултет, 483–500.

Зељић, М. (2014). *Методички аспекти ране алгебре*. Београд: Универзитет у Београду, Учитељски факултет.

Милинковић, Н. (2021). *Контекстуални приступи настави алгебре у млађим разредима основне школе* (докторска дисертација). Универзитет у Крагујевцу: Педагошки факултет у Ужицу.

Милинковић, Н., Маричић, С. (2022). Непозната и променљива – проблем учења ране алгебре. У: С. Маринковић (ур.), *Наука и образовање – изазови и перспективе*. Ужице: Педагошки факултет, 245–262.

Стојкановић, Ј., Маричић, С. (2025). Развијање раног алгебарског мишљења путем визуелно задатих растућих низова код ученика млађих разреда основне школе. *Иновације у настави*, 38(4), 78–94. <https://doi.org/10.5937/inovacije2504078S>

Akgün, L., Özdemir, M. E. (2006). Students' understanding of the variables' general number and unknown: A case study. *The Teaching of Mathematics*, 16, 45–51.

Anderson, R. D. (2002). Reforming science teaching: What research says about inquiry. *Journal of Science Teacher Education*, 13(1), 1–12. <https://doi.org/10.1023/A:1015171124982>

Artigue, M., Baptist, P. (2012). *Inquiry in mathematics education*. Bruxelles: European Commission.

Artigue, M., Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, 797–810. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>

Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education and the development of learning trajectories. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 18(3), 63–89. <https://doi.org/10.5485/TMCS.2020.0505>

Baptist, P., Artigue, M. (2012). *Inquiry in mathematics education: Background resources for implementing inquiry in science and mathematics at school (Fibonacci Project)*. Paris: La main à la pâte / Fibonacci Project.

Bazzini, L., Boero, P. (2004). Inequalities in mathematics education: The need for complementary perspectives. In: M. J. Høines, A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Bergen, Norway: PME, 137–166. <https://hdl.handle.net/2318/102356>

Bell, R. L., Smetana, L., Binns, I. (2005). Simplifying inquiry instruction. *The Science Teacher*, 30–33.

Blanton, M., Kaput, J. (2004). Elementary Grades Students' Capacity for Functional Thinking. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 135–142.

Blanton, M. L., Kaput, J. J. (2011): Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In: J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dia-*

*logue from multiple perspectives*. Dordrecht: Springer, 5–23. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_2)

Brizuela, B. M., Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. In: N. A. Pateman, B. J. Dougherty, J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, Honolulu: College of Education, University of Hawaii, 137–144.

Cai, J., Ng, D., Moyer, J. (2005). Developing algebraic thinking in earlier grades. *Proceedings of PME*, 29(1), 39–66.

Carak, O., Dikmenli, M., Saritas, O. (2008). Effect of 5E instructional model in student success in primary school 6th year circulatory system topic. *Asia-Pacific Forum on Science Learning and Teaching*, 9(2), 1–11.

Carraher, D. W., Martinez, M. V., Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 3–22. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address presented at the 22nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Tucson, AZ. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates / Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In: J. Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*, 235–272.

Dabić Boričić, M. Zeljić, M. (2021). Modelovanje ekvivalencije matematičkih izraza u početnoj nastavi. *Inovacije u nastavi*, 34(1), 30–43. <https://doi.org/10.5937/innovacije2101030D>

Chowdhury, R. (2016). Inquiry-based learning as an instructional strategy to increase student achievement in math and science. In: M. Simonson (Ed.), *Selected papers on the practice of educational communications and technology: 39th Annual proceedings*. Bloomington, IN: Association for Educational Communications and Technology, 177–188. Colburn, A. (2000). An inquiry primer. *Science Scope*, 23(6), 42–44.

Constantinou, C. P., Tsivitanidou, O. E., Rybska, E. (2018). What is inquiry-based science teaching and learning? In: O. E. Tsivitanidou, P. Gray, E. Rybska, L. Louca, C. P. Constantinou (Eds.), *Professional development for inquiry-based science teaching and learning*. Cham, Switzerland: Springer, 1–23.

De Jong, T. (2006). Technological advances in inquiry learning. *Science*, 312(5773), 532–533. <https://doi.org/10.1126/science.1127750>

Dorier, J. L., García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, 45(6), 837–849. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0512-8>

Engeln, K., Euler, M., Maass, K. (2013). Inquiry-based learning in mathematics and science: A comparative baseline study of teachers' beliefs and practices across 12 European countries. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 823–836. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0507-5>

Filloy, E., Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19–25.

Friedman, T. (2005). *The world is flat: A brief history of the twenty-first century*. New York: Farrar, Strausand Giroux.

Furtak, E. M., Seidel, T., Iverson, H., Briggs, D. C. (2012). Experimental and quasi-experimental studies of inquiry-based science teaching: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 82(3), 300–329. <https://doi.org/10.3102/0034654312457206>

Greene, M., Renesse, C. (2016). A path to designing inquiry activities in mathematics. *PRIMUS*, 27(7), 646–668. <https://doi.org/10.1080/10511970.2016.1211203>

Hammerman, E. (2006). *8 essentials of inquiry-based science, K–8*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Hattie, J. (2009). *Visible learning: A synthesis of 800+ meta-analyses on achievement*. Abingdon: Routledge.

Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: A response to Kirschner and Sweller. *Educational Psychologist*, 42(2), 99–107. <https://doi.org/10.1080/00461520701263368>

Hoch, M., Dreyfus, T. (2004). Structure sense in highschool algebra: The effect of brackets. In: M. J. Høines, A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, Bergen, Norway: PME, 49–56.

Jessen, B., Doorman, M., Bos, R. (2017). *Praktični MERIA vodič za istraživački usmerenu nastavu matematike*. Projekt MERIA.

Keselman, A. (2003). Supporting inquiry learning by promoting normative understanding of multivariable causality. *Journal of Research in Science Teaching*, 40(9), 898–921. <https://doi.org/10.1002/tea.10115>

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326. <https://doi.org/10.1007/BF00311062>

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, NY: Macmillan, 390–419.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139–151.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297–312. <https://doi.org/10.2307/30034852>

Krugly-Smolka, E., Taylor, P. C. (Eds.). (2004). Inquiry in science education: International perspectives. *Science Education*, 88(3), 397–419. <https://doi.org/10.1002/sc.10118>

Laudano, F., Tortoriello, S. F., Vincenzi, G. (2019). An experience of teaching algorithms using inquiry-based learning. In: P. Díaz Kinshuk, I. Aedo, E. Mora (Eds.). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(3), 344–353. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565453>

Lazonder, A. W., Harmsen, R. (2016). Meta-analysis of inquiry-based learning: Effects of guidance. *Review of Educational Research*, 86(3), 681–718. <https://doi.org/10.3102/0034654315627366>

Mäeots, M., Pedaste, M., Sarapuu, T. (2008). Transforming students' inquiry skills with computer-based simulations. *Proceedings of the 8th IEEE International Con-*

*ference on Advanced Learning Technologies* IEEE, 938–942. <https://doi.org/10.1109/ICALT.2008.239>

Maričić, S., Milinković, N., Brković, M. (2023). The equals sign: The challenges of learning arithmetic. In: A. Istenič, M. Gačnik, B. Horvat, M. Kukanja Gabrijelčič, V. Riccarda Kiswarday, M. Lebeničnik, M. Mezgec, M. Volk (Eds.), *Upbringing and education between the past and the future*. Koper: Univerza na Primorskem, 471–491.

Milinković, N., Maričić, S., Đokić, O. (2022). The equals sign: The problem of early algebra learning and how to solve it. *Inovacije u nastavi*, 35(3), 26–43. <https://doi.org/10.5937/inovacije2203026M>

Milinkovic, N., Maričić, S., Lazić, B. (2022). The problem of (mis)understanding the equals sign in junior grades of primary school. *Uzdanica*, XIX, 95–113.

Minner, D. D., Levy, A. J., Century, J. (2010). Inquiry-based science instruction: What is it and does it matter? Results from a research synthesis years 1984 to 2002. *Journal of Research in Science Teaching*, 47(4), 474–496. <https://doi.org/10.1002/tea.20347>

Molina, M., Castro, E., Ambrose, R. (2005). Enriching arithmetic learning by promoting relational thinking. *The International Journal of Learning*, 12(5), 265–270. <https://doi.org/10.18848/1447-9494/CGP/v12i05/47502>

Pedaste, M., Baucal, A., Reisenbuk, E. (2021). Towards a science inquiry test in primary education: Development of item sand scales. *International Journal of STEM Education*, 8, 1–19. <https://doi.org/10.1186/s40594-021-00278-z>

Pedaste, M., Mäeots, M., Leijen, Ä., Sarapuu, T. (2012). Improving students' inquiry skills through reflection and self-regulation scaffolds. *Technology, Instruction, Cognition and Learning*, 9(1–2), 81–95.

Rezba, R. J., Auldridge, T., Rhea, L. (1998). *Teaching & learning the basic science skills*. Richmond, VA: Department of Education, Office of Elementary and Middle School Instructional Services.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth, S., Peret, I. (2003). Algebra in elementary school. *International group for the psychology of mathematics education*, 4, 127–134.

Schumacher, S. Roth, J. (2015). Guided inquiry learning of fractions: A representational approach. In: K. Krainer, N. Vondrová (Eds.), *CERME9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Prague: Charles University, 2545–2551.

Seyhan, H., Morgil, I. (2007). The effect of 5E learning model on teaching of acid-base topic in chemistry education. *Journal of Science Education*, 8(2), 120–123.

Sfard, A., Linchevski, L. (1994). Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link – the case of equations and inequalities. *Rendiconti del Seminario Matematico*, 52(3), 279–307.

Skoumpourdi, C. (2019). Inquiry-based implementation of a mathematical activity in a kindergarten classroom. In: U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, 2347–2350.

Spronken-Smith, R. (2008). *Experiencing the process of knowledge creation: The nature and use of inquiry-based learning in higher education*. <https://ako.ac.nz/assets/>

[Knowledge-centre/Hei-toko/inquiry-based-learning/SUMMARY-REPORT-Inquiry-based-Learning.pdf](#)

Stacey, K., MacGregor, M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 149–167. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00026-7](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7)

Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M. (2015). Just say yes to early algebra! *Teaching Children Mathematics*, 22(2), 92–101. <https://doi.org/10.5951/teachmath.22.2.0092>

Sungur, S., Tekkaya, C., Geban, Ö. (2001). The contribution of conceptual change texts accompanied by concept mapping to students' understanding of the human circulatory system. *School Science and Mathematics*, 101(2), 91–101. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2001.tb18010.x>

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level. In: A. Bell, B. Low, J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research & practice in mathematical education*. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, 27–45.

Wu, S. C., Lin, F. L. (2016). Inquiry-based mathematics curriculum design for young children teaching experiment and reflection. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(4), 843–860. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1233a>

Nenad S. Milinković

Sanja M. Maričić

University of Kragujevac  
Faculty of Education in Užice  
Department of Methodology

Bojan D. Lazić

University of Novi Sad  
Faculty of Education in Sombor  
Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics

## INQUIRY-BASED MATHEMATICS INSTRUCTION – A PATHWAY TO EARLY ALGEBRA EDUCATION

*Abstract:* The authors emphasize the significance of introducing algebraic content in early education, while also addressing the inherent challenges and difficulties associated with such learning. With the aim of developing a methodological framework for teaching algebra that promotes conceptual understanding, the paper draws attention to the potential of inquiry-based instruction. Within this context, the authors identify the key features and didactic merit of his approach and propose a structured teaching framework comprising the following phases: provocation, question formulation, experimentation, discussion, reflection, and documentation. The central idea is that students, through these phases, explore and construct early algebraic concepts by engaging with and manipulating concrete materi-

als. Through selected content examples, the paper illustrates how inquiry-based instruction can support the development of key algebraic concepts such as functional dependency, equations, and inequalities, and how students can attain a deeper understanding of solving equations and inequalities. The ultimate goal of this approach to early algebra instruction is to enhance students' comprehension of fundamental algebraic concepts through active engagement in the construction of their own knowledge.

*Keywords:* mathematics, early algebra, inquiry-based instruction, active learning, scientific knowledge.